

Instabilité de flambage des nappes visqueuses de fluides non-newtonien

N. Valade^a, A. Pereira^b, R. Valette^b

a. Etudiant Mines Paristech nicolas.valade@mines-paristech.fr

b. PSL Research University, MINES ParisTech, Centre for material forming (CEMEF), CNRS UMR 7635, CS 10207 rue Claude Daunesse, 06904 Sophia-Antipolis Cedex, France.
anselmo.pereira@mines-paristech.fr

Mots clés : Instabilité de flambage ; fluide en loi puissance ; simulation numérique directe, loi d'échelle

Résumé :

Dans cet article, nous étudions les effets visco-plastiques et dilatants sur le développement des phénomènes d'instabilité de flambage dans les nappes de fluide non-newtonien dans lesquels la viscosité suit une loi puissance. Ces instabilités apparaissent de la compression du fluide lors de la chute d'un filament venant se déposer sur une surface rigide ou un substrat liquide. Nos analyses s'appuient sur des lois d'échelle et des simulations numériques directes. Les résultats numériques se basent sur une méthode variationnelle multi-échelle (VMS) pour des écoulements multi-phasiques. En un mot, lorsque le poids du fluide compense les efforts visqueux, l'amplitude des plis ainsi que la fréquence de repliement sont des fonctions puissances des nombres de Galilée (le rapport entre les efforts visqueux et le poids) et de l'indice de comportement du fluide.

1 Introduction

1.1 Problème général : Écoulement de suspensions

Les suspensions sont des fluides comportant une phase solide (grains, particules,...) incluse dans une matrice liquide. Ces derniers sont fréquents dans de nombreux domaines industriels tels que les fluides agro-alimentaires, les polymères, et divers fluides de l'industrie du BTP.

La nature de la phase solide (dimensions, interactions, masse volumique), de la matrice (densité, viscosité), ainsi que la fraction volumique de solide dans le liquide influencent le comportement non-newtonien en écoulement des suspensions. Différents phénomènes surviennent alors. En effet, le fluide peut présenter une contrainte seuil d'écoulement (ce qui permet de faire une « noix » de crème Nivéa ou de mayonnaise par exemple), un comportement rhéofluidifiant à basses vitesses ou au contraire rhéoépaississant aux fortes vitesses (comme le mélange eau/maïzena brusquement déformé), des hétérogénéités de concentration et enfin des rhéologies non-locales (i.e. la viscosité en un point dépend de l'état de son environnement voisin).

Ces comportements singuliers ne peuvent être ignorés dans l'industrie lors des opérations de remplissage ou d'étalement. Durant ces procédés, un film de fluide est extrudé et chute verticalement jusqu'à sa surface d'accueil. La nature non newtonienne de l'écoulement pose régulièrement problème ; en effet :

- Il limite les débits d'écoulement, en particulier au niveau des buses d'extrusion à cause des phénomènes rhéoépaississants ;
- A faible vitesse et hauteur élevée, le jet peut se rompre, et causer des irrégularités de dépôt ;
- Dès que le débit est élevé, le film forme à l'impact des enroulements ou des repliements plus ou moins réguliers pouvant piéger de l'air ;
- Le seuil d'écoulement maintient le fluide à l'endroit de dépôt, rendant l'étalement final difficilement contrôlable.

Toutes ces instabilités sont très difficiles à prédire dans le cas de rhéologies non-newtoniennes, amenant une forte demande de compréhension et de modélisation de tels jets. Ce sont ainsi des thématiques de recherche actuelles, motivées par divers acteurs industriels.

1.2 Dépôt d'un jet visqueux sur une surface rigide : Ribe (2003/2012) - Pereira (2019)

Dans cet article, nous nous intéressons plus particulièrement au dépôt de fluides visqueux sur une surface rigide. On retrouve cette problématique à des échelles très différentes comme la lithosphère sub-océanique ou plus simplement lorsque l'on fait couler du miel sur une biscotte au petit déjeuner. Bien que très simple à mettre en lumière, ce phénomène, dit d'instabilité de flambage, comporte une physique d'une grande complexité. En effet, de nombreux paramètres tel que les propriétés du fluide et le mode d'extrusion influent sur les caractéristiques du dépôt final : le motifs, sa périodicité, et ses dimensions.

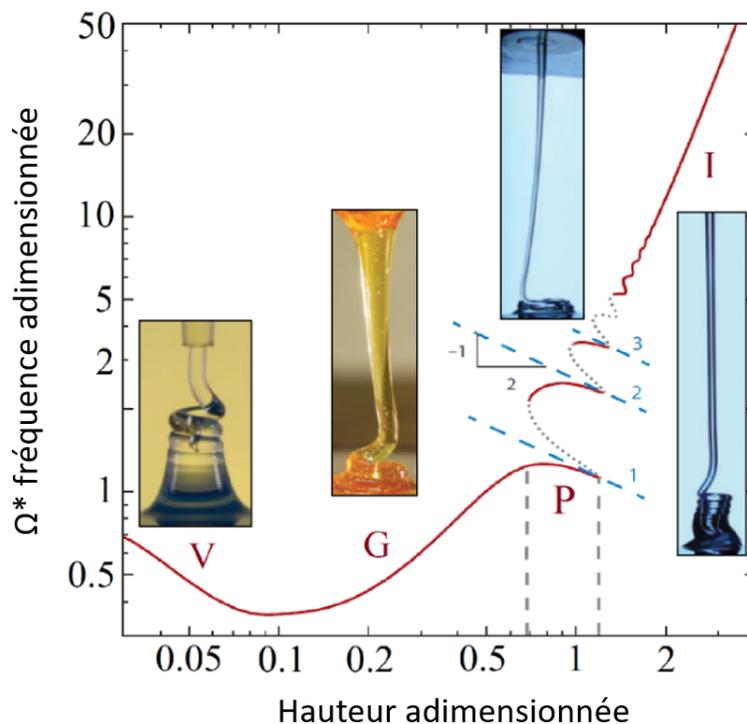


FIGURE 1 – Les quatre régimes d'enroulement relatifs aux jets cylindriques de fluides newtoniens visqueux : visqueux (V), gravitationnel (G), pendulaire (P) et inertiel (I) contrôlés par la hauteur d'écoulement et caractérisés par la fréquence d'enroulement. Figure de Ribe et al. 2012

Dans la bibliographie, la plupart des études réalisées inspectent le cas d'un jet cylindrique. Dans ce cas, le liquide a tendance à venir s'enrouler sur lui-même de façon à former une spirale (Fig.[1]). A partir d'analyses théoriques, numériques et expérimentales, Ribe et ses collaborateurs ont mis en évidence l'existence de quatre différents régimes d'enroulement en fonction de la variation des paramètres pour des fluides newtoniens. Ces régimes résultent de la compétition des trois forces présentes dans l'écoulement : visqueuses, inertielles et de pesanteur. Le "régime inertiel" (voir Fig. [1]) est le plus fréquemment rencontré dans l'industrie, naissant de la compétition entre les efforts inertiels et visqueux. En 2019, A. Pereira et al. [18] de l'équipe CFL du CEMEF ont généralisé, pour ce régime, les résultats de Ribe au cas de fluides non-newtoniens.

De manière analogue, notre travail s'intéresse ici au dépôt d'une nappe de fluide de section rectangulaire (figure [2]). Dans ce cas, le liquide tend à se déposer en couches de plis successifs. La principale différence par rapport au jet cylindrique est la perte de l'invariance par rotation du problème. Ce dernier fait l'objet de recherche récente en vu de ses multiples applications industrielles.

En 2003, Ribe [8] a écrit un article de référence sur ce sujet où sont établies des lois d'échelle reliant les caractéristiques du dépôt (la largeur des plis ainsi que la fréquence de repliement) et les paramètres d'entrée du problème pour les fluides newtonien. Pour ce faire, l'écoulement tri-dimensionnel est modélisé par sa ligne moyenne en un problème bi-dimensionnel. Dès lors, il établit les équations mécaniques (à un instant t fixé), cinématiques (au cours du temps), et de conditions aux frontières de la nappe afin d'obtenir un système de 18 équations aux dérivées partielles couplées qu'il résout numériquement. Deux différents régimes d'instabilité de flambage sont alors mis en évidence. Premièrement, pour de faibles hauteurs et de fortes vitesses, l'écoulement du fluide est forcé par l'opérateur et les efforts visqueux sont prépondérants dans le fluide. C'est le "régime visqueux", Ribe [8]. La taille des plis est alors proportionnelle à la hauteur de chute, tandis que le temps de formation d'un pli au rapport de la hauteur sur la vitesse en sortie de buse. Il est par ailleurs intéressant de noter que dans le régime visqueux, aucune des caractéristiques du dépôt ne dépend de la viscosité.

Ensuite, pour des hauteurs supérieures, on passe au "régime gravitationnel". Ribe observe alors deux zones d'écoulement distinctes. Après « une queue » où le liquide s'écoule verticalement, il y a une zone de flambage, proche de la surface rigide, où les plis se forment. Pour chacune de ces zones et au regard de ces observations, l'auteur simplifie les équations régissant l'écoulement afin d'obtenir des lois d'échelle reliant directement fréquence et amplitude du repliement avec la hauteur de chute et les propriétés du fluide newtonien. Ces dernières sont en très bon accord avec ses nombreux résultats expérimentaux et numériques.

1.3 Instabilité de flambage d'une nappe visqueuse en régime gravitationnel

Dans cet article, nous centrons alors notre étude à la généralisation des travaux de Ribe sur le régime gravitationnel pour des nappes dont la rhéologie du fluide est non-newtonienne en loi puissance [Ostwald-25, Bird-87]. C'est-à-dire dont la viscosité cinématique varie en fonction de la vitesse de déformation généralisée, représentant dans le cas général les fluides rhéofluidifiants et rhéoépaississants.

Le phénomène de repliement est minutieusement analysé en fonction du temps grâce à une méthode numérique adaptative multi-échelle pour deux fluides (l'air et le fluide visqueux), combinée avec une fonction "level-set", décrivant finement les interfaces entre les deux différentes phases. La dimension des plis et la fréquence des instabilités sont conjointement étudiées à travers des lois d'échelle. D'après nos analyses, la dynamique du flambage d'une nappe visqueuse dans le régime gravitationnel peut être exprimée comme une fonction du nombre de Galilée (le quotient entre les efforts dus à la gravité et ceux dus aux forces visqueuses).

L'article s'organise comme suit. La formulation physique du problème ainsi que la description de la

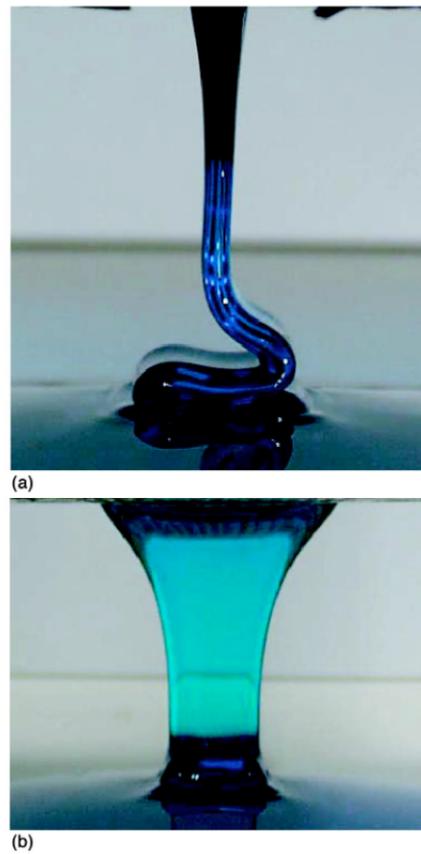


FIGURE 2 — Dépôt instable périodique d'une nappe de glucose vue de coté (a) et de face (b) tombant d'une hauteur de 7cm.

méthode numérique utilisées sont présentées dans la section 2. Nos principaux résultats et analyses sont décrits dans la troisième partie. Finalement, nous tirons les conclusions et perspectives de notre travail dans la dernière section.

2 Formulation physique et méthode numérique

Comme illustré Fig. 3, nous étudions ici les instabilités de flambage d'un écoulement visqueux (en rouge) entouré d'air (en bleu). Le fluide non-newtonien, de masse volumique ρ et de viscosité η , sort d'une buse d'épaisseur a_0 et de largeur b_0 avec une vitesse initiale verticale $u_{z,0}$. Ce dernier tombe sur la surface rigide (Fig. 3a) en formant alors des plis d'amplitude δ dans le plan x_z à une fréquence Ω (Fig. 3b). On notera H , la distance entre la buse et le premier point de contact du filament avec la pile inférieur de fluide immobile. Les caractéristiques géométriques de la nappe varient avec l'écoulement ; on note a_1 (b_1) l'épaisseur (respectivement la largeur) du filament dans la zone de flambage. Enfin lorsque le régime permanent est atteint (l'instabilité de flambage s'effectue à une fréquence Ω constante), le filament a une vitesse $u_{z,1} \sim Q/(a_1 b_1)$ au niveau du flambage, ou Q représente le débit du fluide.

L'approche numérique utilisée pour simuler la création des plis est basée sur un logiciel de résolution général [CIMLIB-CFD][21] qui prend en compte la rhéologie de chaque fluide ainsi que les efforts de tension de surface [18,22]. Plus précisément, le tenseur de contrainte de Cauchy est défini comme :

$$\sigma_c = -pI + \tau, \quad (1)$$

Où, p représente la pression, I le tenseur identité et τ le tenseur de contraintes visqueuses. Ce dernier est donné par :

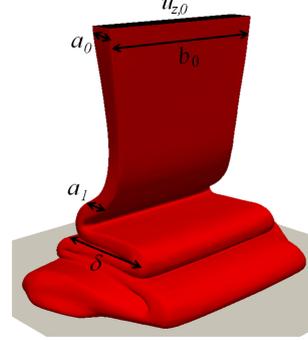
$$\tau = 2\eta D(u), \quad (2)$$

$D(u)$ est le tenseur de taux de déformation et u le vecteur vitesse. La viscosité effective η est calculée en utilisant un modèle de comportement en loi puissance. Cette dernière inclue la régularisation de Papanastasiou (la partie en exponentiel dans l'équation suivante;)[23] :

$$\eta = k\dot{\gamma}^{(m-1)} (1 - e^{-n\dot{\gamma}})^{(1-m)}, \quad (3)$$

où k est la consistance, m l'indice de comportement du fluide et $\dot{\gamma}$ représente le second invariant du tenseur de vitesse de déformation [20]. n est grand et est le coefficient de Papanastasiou qui borne à $k * n$ la valeur de la viscosité effective pour des valeurs de $\dot{\gamma}$ proches de zéro. D'après l'Eq. 3, il est important de noter que les valeurs de $m < 1$ correspondent aux fluides pseudo-plastic, tandis que ceux supérieur à 1 sont associés aux effets dilatants (la viscosité croit en fonction de $\dot{\gamma}$). Enfin, on retrouve le comportement newtonien lorsque $m = 1$ (viscosité constante).

(a) General view



(b) Side view

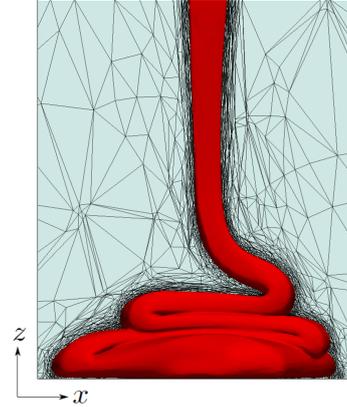


FIGURE 3 – Le fluide visqueux (en rouge) de masse volumique ρ et viscosité η sort de la buse avec une épaisseur a_0 , une largeur b_0 et une vitesse verticale $u_{z,0}$. Il tombe sur la surface rigide (en gris) en formant des plis d'amplitude δ dans le plan x_z à une fréquence Ω . Le fluide est entouré d'air (bleu) de viscosité η_{air} et de masse volumique ρ_{air} . (a) vue générale. (b) vue de coté.

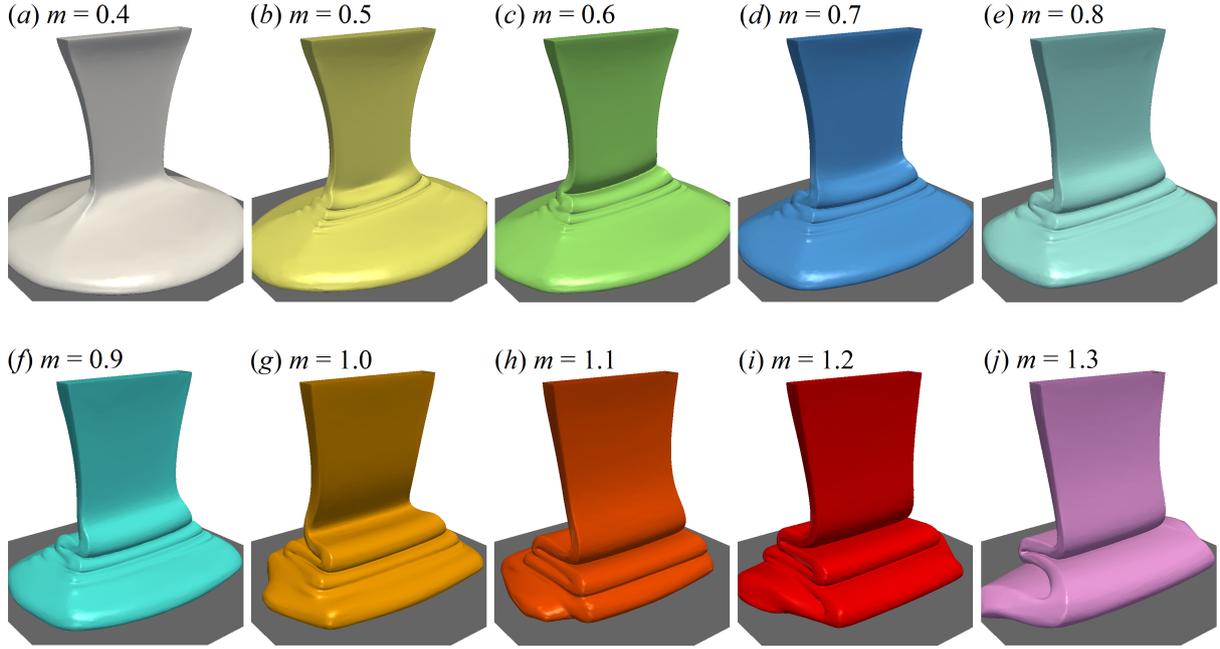


FIGURE 4 – Différentes nappes de fluide non-newtonien se repliant, prises au même instant t . La vitesse initiale d'extrusion $u_{z,0}$ (0.1 m/s), la consistance des fluides k (10 Pa s^m), leur masse volumique (1000 kg/m³) ainsi que la hauteur de chute H (0.07m) sont maintenues fixes, tandis que l'on considère 10 indices de comportement différents : $m = 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$ (fluides rhéofluidifiants); $m = 1$ (fluide newtonien); $m = 1.1, 1.2, 1.3$ (fluides réoépaississants).

L'équation de Navier-Stokes donne alors :

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u - g \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \tau + f_{st}, \quad (4)$$

dans laquelle ρ , ∇ , g , $\nabla \cdot$ et f_{st} sont respectivement, la masse volumique du fluide, l'opérateur gradient, le vecteur d'accélération de pesanteur, l'opérateur divergence, et le terme de capillarité associé aux forces de tension de surface. En raison de sa faible influence (entre 1 et 20% d'après l'article de Ribe et al. [10]), nous négligerons ce dernier dans la suite, i.e. $f_{st} = 0$.

Nos simulations numériques utilisent une méthode variationnelle multi-échelle (VMS) combinée avec un maillage adaptatif anisotrope d'éléments hautement étirés (lignes noires sur la Fig. 3), comme présenté par Riber et al. [24]. Pour suivre les interfaces fluide/air, fluide/pistons et pistons/air en fonction du temps, t , une fonction "level-set" est implémentée[25]. Les champs de pression et de vitesse sont initialement inconnus et calculés numériquement en utilisant une structure unifiée où tous les fluides occupent une unique maille numérique et en mixant simplement les différentes propriétés des fluides (viscosité, densité, etc.) en utilisant des fonctions Heaviside (construites à partir de chaque fonction level-set). Cela permet de prendre en compte les discontinuités physiques aux interfaces.

Sur la figure 3, nous pouvons voir un maillage simulé, constitué d'environ 10^6 éléments répartis principalement aux interfaces. Les surfaces représentées correspondent à celle dont le level-set est nulle (i.e., les interfaces). Dans la suite de notre travail, les dimensions de la buse $a_0 = 0.007$ et $b_0 = 0.05$, la masse volumique du fluide $\rho = 1000$ kg/m³ ainsi que sa vitesse initiale $u_{z,0} = 0.1$ m/s sont fixes (ainsi, $Q = 0.000035$ m³/s). Néanmoins, un large éventail de rhéologies (k , m), et de hauteurs de chute différentes est considéré : $0.4 \leq m \leq 1.3$; $(O)10^0 \leq k \leq (O)10^2$ Pa $\cdot s^m$; $0.03 \leq H \leq 0.6$ m. La viscosité et la masse volumique de l'air sont inchangées avec : $\eta_{air} = 10^{-5}$ et $\rho_{air} = 1$ kg/m³. Enfin, les conditions initiales de simulation sont : la vitesse initiale $u_{z,0}$ du fluide arrivant dans le domaine à l'instant $t = 0$ et aucune contrainte dans l'air.

3 Résultats et analyses

Comme précédemment démontré par Ribe [8], deux principaux régimes d'instabilité de flambage existent pour le dépôt de nappes visqueuses, chacun correspondant à un équilibre différent entre les forces inertielles, visqueuses, et gravitationnelles que subit l'écoulement. Le régime auquel nous nous intéressons, le régime "gravitationnel" survient lorsque la dynamique du fluide est déterminée par l'équilibre entre les efforts visqueux et ceux dus à la gravité. Comme nous allons le montrer, ce régime est hautement affecté par la rhéologie du fluide.

Sur la figure 4, nous pouvons voir dix écoulements de nappe visqueuses au même instant t pour des fluides en loi puissance différents. Les paramètres d'extrusion : hauteur H (0.07m), vitesse $u_{z,0}$ (0.1 m/s), et les dimensions de la buse) sont constantes. De plus, la masse volumique (1000 kg/m^3) et la consistance k (10 Pa s^m) sont fixés. Seule l'indice de comportement du fluide varie : $m = 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$ (fluide rhéofluidifiant); $m = 1$ (fluide newtonien); $m = 1.1, 1.2, 1.3$ (fluide rhéoépaississant). Nous pouvons voir que l'amplitude des plis est bien supérieure pour les fluides rhéoépaississant ($m > 1$). Leur viscosité augmente dans les zones de flambage comme montrée par une flèche noire sur la figure 5(b) dans le plan $x - z$. Cela induit de plus fortes forces visqueuses et ainsi une amplitude de repliement supérieure au cas réofluidifiant ($m < 1$). En effet comme c'est illustré sur la figure 5(b), le comportement pour $m < 1$ est très différent et la zone de flambage connaît une viscosité plus faible qu'aux autres endroits de l'écoulement.

De plus sur la Fig. 4, il est important de remarquer que la décroissance de m s'accompagne d'une baisse graduelle de la taille des plis. A $m = 0.4$ (Fig. 4a), δ devient comparable à l'épaisseur de la nappe à l'impact, a_1 ($\delta \approx a_1$) et par conséquent nous n'observons plus de plis mais un étalement de la nappe. Les effets sur δ du paramètre m sont illustrés plus en détails sur la figure 6(a), 6(b), et 6(c), où δ est étudié en fonction de la hauteur de chute pour trois différentes valeurs de m : $m = 0.8$ (rhéo-fluidifiant), $m = 1.0$ (Newtonien), and $m = 1.2$ (rhéo-épaississant). On voit clairement que la taille des plis est inférieure dans le cas $m = 0.8$. De plus, nous observons que δ est également beaucoup plus affecté par les variations de hauteur, ce qui n'est pas observé dans les autres cas ($m = 1$ et $m = 1.2$) pour l'ensemble de la plage de hauteur considérée ($0.04m \leq H \leq 0.25m$).

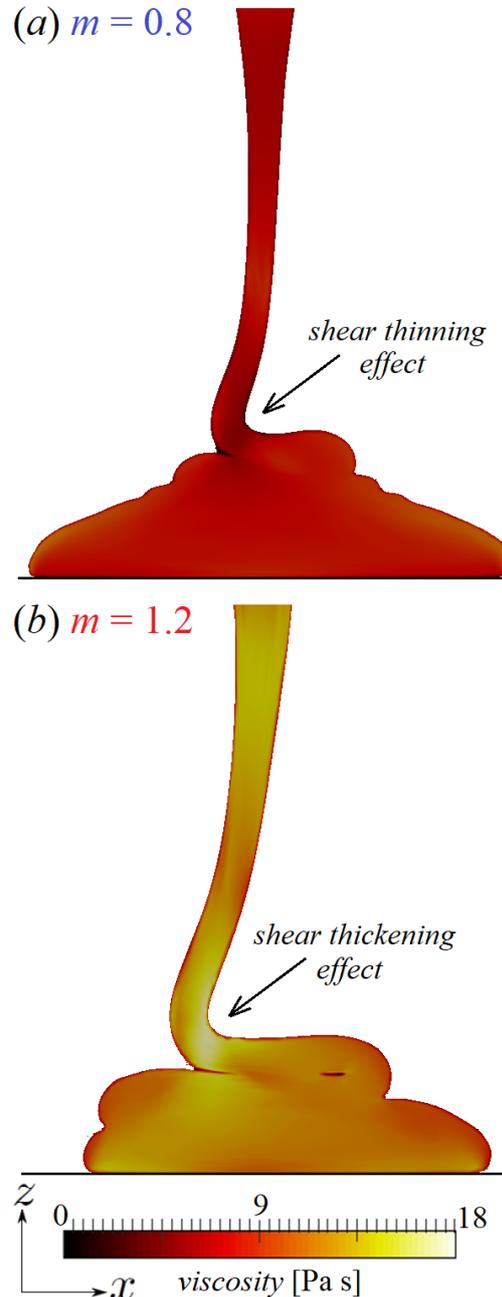


FIGURE 5 – Champ de viscosité dans le plan de flambage $x - z$ pour deux fluides en loi puissance : (a) $m = 0.8$; (b) $m = 1.2$. La vitesse verticale initiale $u_{z,0}$ (0.1 m/s), la consistance du fluide k (10 Pa s^m), sa masse volumique ρ (1000 kg/m^3) et la hauteur de chute H (0.07m) sont fixes. Les effets fluidifiant et épaississant sont indiqués par une flèche noire.

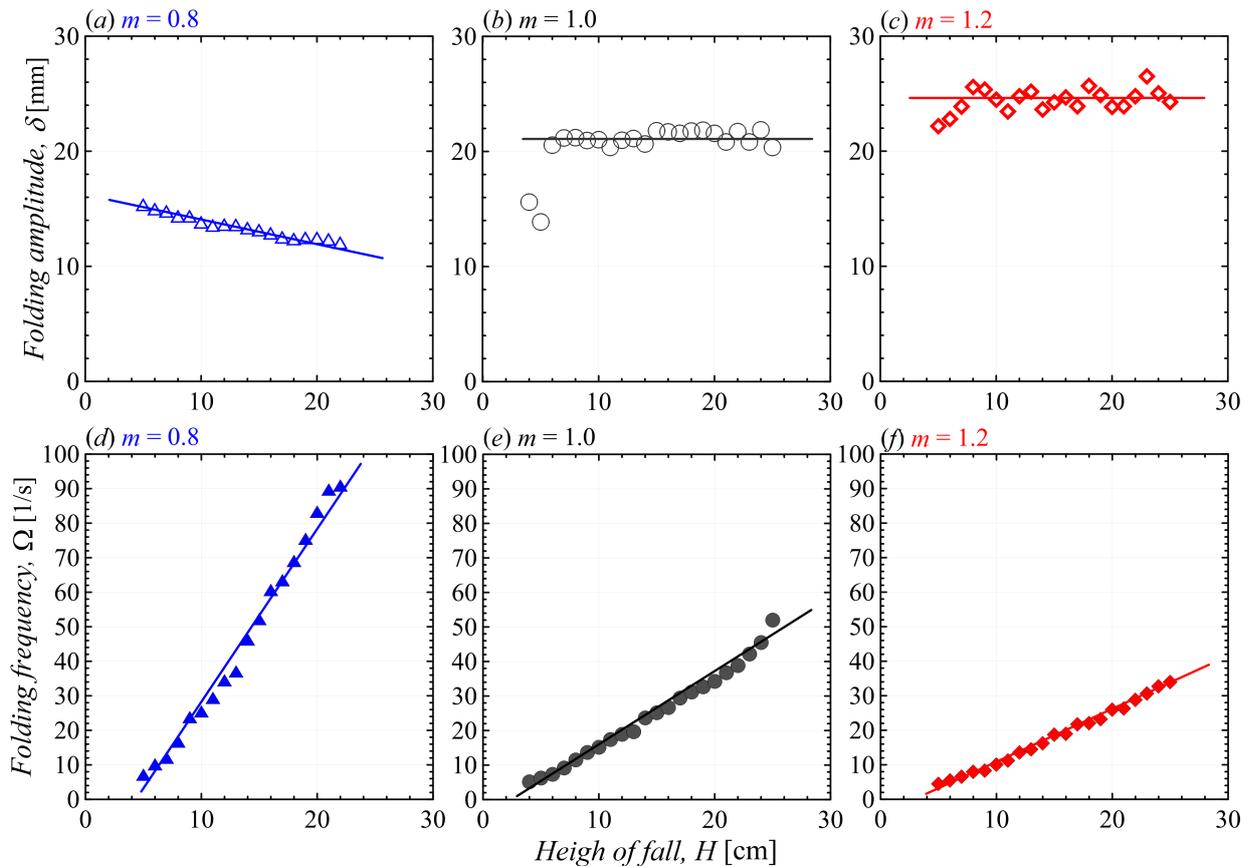


FIGURE 6 – On illustre ici l’influence de m sur l’amplitude des plis δ (a, b, et c) et la fréquence de l’instabilité Ω (d, e, et f) pour trois différentes valeurs de m ($m = 0.8, 1.0, 1.2$). La vitesse verticale initiale $u_{z,0}$ (0.1 m/s), la consistance du fluide k (10 Pa s^m), sa masse volumique ρ (1000 kg/m³) et la hauteur de chute H (0.07m) sont fixes.

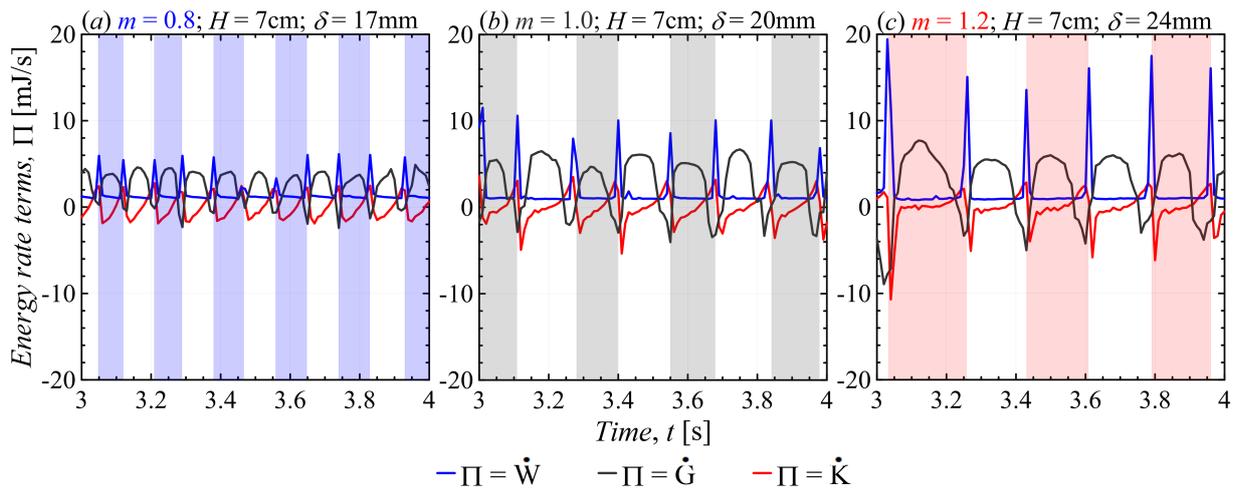


FIGURE 7 – Évolution de la puissance visqueuse dissipée \dot{W} (en bleu), de la variation d’énergie cinétique \dot{K} (en rouge), et potentiel de gravité \dot{G} (en gris) en fonction du temps, t , pour trois fluides en loi puissance : (a) $m = 0.8$; (b) $m = 1.0$; (c) $m = 1.2$. La vitesse verticale initiale $u_{z,0}$ (0.1 m/s), la consistance du fluide k (10 Pa s^m), sa masse volumique ρ (1000 kg/m³) et la hauteur de chute H (0.07m) sont fixes.

Enfin, les figures 6(*d*), 6(*e*), et 6(*f*) montrent également que, à un H fixé, la fréquence d'instabilité est plus faible dans les fluides rhéo-épaississant, ce qui est dû à une plus grande résistance à la déformation développée par le fluide. Néanmoins, dans tous les fluides considérés dans notre étude, Ω est une fonction croissante de H . Afin de mettre en lumière le mécanisme physique qui gouverne la dynamique de flambage, nous observons au sein de l'écoulement : la puissance visqueuse dissipée \dot{W} , les variations d'énergie cinétique \dot{K} , et potentiel de gravité \dot{G} . La Fig. 7 illustre la variation de ces quantités en fonction du temps, t , pour trois fluides en loi puissance : (a) $m = 0.8$; (b) $m = 1.0$; (c) $m = 1.2$. Ces termes sont respectivement définies par :

$$\dot{W} = \int_V \eta \dot{\gamma}^2 dV \quad (\text{Puissance visqueuse dissipée, J/s}), \quad (5)$$

$$\dot{K} = \frac{1}{2} \frac{\partial \int_V \rho \|u\|^2 dV}{\partial t} \quad (\text{Variation d'énergie cinétique, J/s}), \quad (6)$$

et

$$\dot{G} = \frac{\partial \int_V \rho g h dV}{\partial t} \quad (\text{Variation d'énergie potentielle de pesanteur, J/s}), \quad (7)$$

V étant le volume du fluide en écoulement. Les régions bleues, grises, et roses indiquent la formation d'un unique pli. La longueur de ces régions représentent ainsi le temps nécessaire pour former une couche de fluide. Les autres paramètres que m sont maintenus constants.

Naturellement, pendant le phénomène de flambage, les variations de vitesse de la nappe induisent des variations de \dot{K} comme nous le voyons sur la courbe rouge. De plus, il est intéressant de noter que les pics de \dot{W} (courbe bleue) sont étroitement corrélées avec des baisses de \dot{G} (en gris) et pour des valeurs négligeables de \dot{K} ($\dot{K} \approx 0$). En d'autres termes, aux moments de fortes dissipations visqueuses : $\dot{W} \sim -\dot{G}$. Cela nous amène à conclure que l'énergie potentiel du filament qui tombe, le futur pli, est en première ordre dissipée par les effets visqueux durant le flambage : [le poids est compensé par les efforts visqueux ; voir][8]. Ainsi, ce résultat nous permet de décrire quelques caractéristiques du phénomène d'instabilité de flambage en utilisant des lois d'échelles basées sur une approche énergétique. Les calculs et résultats sont présentés dans les lignes suivantes.

Globalement, la variation d'énergie potentielle de gravité durant la formation d'un pli, $\dot{G}_{1,f}$, peut être exprimée comme :

$$\dot{G}_{1,f} = \frac{\Delta G_{1,f}}{\Delta t} \sim m_{1,f} g \delta \Omega, \quad (8)$$

où $G_{1,f}$ représente l'énergie potentiel d'un unique pli. La masse de la zone repliée, $m_{1,f}$, est $m_{1,f} \sim \rho \delta a_1 b_1$. Ainsi,

$$\dot{G}_{1,f} = \frac{\Delta G_{1,f}}{\Delta t} \sim \rho g \delta^2 a_1 b_1 \Omega. \quad (9)$$

De plus, la dissipation d'énergie visqueuse durant le phénomène, $\dot{W}_{1,f}$, est définie par :

$$\dot{W}_{1,f} = \int_{V_{1,f}} \eta \dot{\gamma}_{1,f}^2 dV_{1,f} \sim \int_{a_1} k \dot{\gamma}_{1,f}^{m+1} \delta b_1 da_1, \quad (10)$$

dans laquelle $V_{1,f}$ est le volume d'un pli et $\dot{\gamma}_{1,f}$ représente le taux moyen de déformation par flexion. Ce dernier peut être simplement exprimé comme :

$$\dot{\gamma}_{1,f} = \frac{\Delta \gamma_{1,f}}{\Delta t} \sim \frac{a_1}{\delta} \Omega. \quad (11)$$

En conséquence, en remplaçant l'Eq. 11 dans l'Eq.10, on trouve une expression de $\dot{W}_{1,f}$:

$$\dot{W}_{1,f} \sim \frac{k b_1 a_1^{m+2} \Omega^{m+1}}{\delta^m}. \quad (12)$$

En admettant que $\dot{G}_{1,f} \sim \dot{W}_{1,f}$ (comme indiqué dans la figure. 7), et que $u_{z,1} \sim \delta\Omega$ de part l'équation de conservation du débit massique, on trouve alors la fréquence du flambage Ω

$$\Omega \sim \left(\frac{u_{z,1}^{m+2} \rho g}{k a_1^{m+1}} \right)^{\frac{1}{2m+2}} \sim \frac{u_{z,1}}{a_1} \left[\frac{\rho g a_1}{k (u_{z,1}/a_1)^m} \right]^{\frac{1}{2m+2}}, \quad (13)$$

ainsi que l'amplitude des plis :

$$\delta \sim \left(\frac{k u_{z,1}^m a_1^{m+1}}{\rho g} \right)^{\frac{1}{2m+2}} \sim a_1 \left[\frac{k (u_{z,1}/a_1)^m}{\rho g a_1} \right]^{\frac{1}{2m+2}}. \quad (14)$$

Finalement, en récrivant les deux équations 13 et 14 comme des fonctions du nombre sans dimension de Galilée défini comme le quotient entre le poids et les efforts visqueux, $\text{Ga} = \frac{\rho g a_1}{k (u_{z,1}/a_1)^m}$:

$$\Omega^* = \frac{\Omega}{u_{z,1}/H} \sim \frac{H}{a_1} \text{Ga}^{\frac{1}{2m+2}} \quad (15)$$

$$\delta^* = \frac{\delta}{H} \sim \frac{1}{(H/a_1) \text{Ga}^{\frac{1}{2m+2}}} \quad (16)$$

Les équations 15 et 16 indiquent clairement que, à un nombre de Galilée fixé, la fréquence normalisée décroît avec m , tandis que la taille des plis devient plus prononcée. Cela colle avec les résultats illustrés dans les figures 4 et 6. En effet, les lois d'échelles développées précédemment sont en excellent accords avec les 300 écoulements simulés dans le cadre du régime gravitationnel. Les figures 8(a) et 8(b) montrent environ 60 d'entre eux. Ω et δ (rendus respectivement sans dimension par $u_{z,1}/H$ and H) apparaissent clairement comme des fonctions linéaires du nombre de Galilée, Ga , et de l'indice de comportement du fluide, m . Plus spécifiquement, $\Omega H/(c u_{z,1}) = (H/a_1) \text{Ga}^{\frac{1}{2m+2}}$, tandis que $\delta c/H = (H/a_1) \text{Ga}^{\frac{-1}{2m+2}}$ (où c est un pré-facteur relatif à chaque fluide en loi puissance, à chaque valeur de m ; $c \sim (O)10^{-1}$). Nos points se rejoignent en une seule courbe, qui confirme la validité des Eqs. 15 et 16. Enfin, il faut observer que, pour un fluide Newtonien, $m = 1$, on a $\Omega H/u_{z,1} \sim (H/a_1) \text{Ga}^{\frac{1}{4}}$ et $\delta/H \sim (a_1/H) \text{Ga}^{-\frac{1}{4}}$, comme précédemment démontré par Ribe [8].

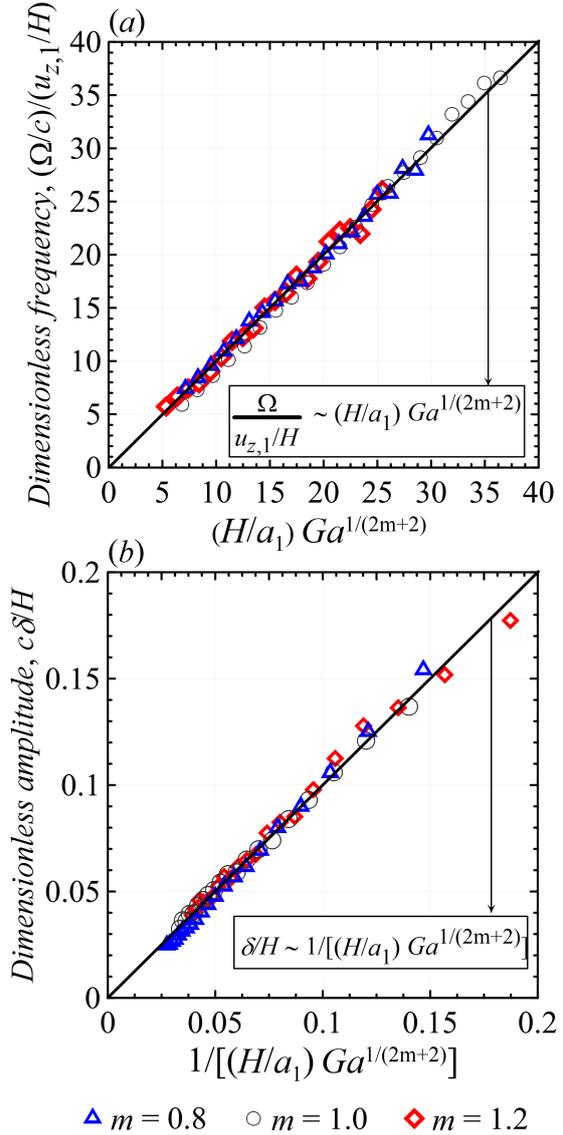


FIGURE 8 – Ω et δ (rendus respectivement sans dimension par $u_{z,1}/H$ et H) apparaissent comme des fonctions des nombres de Galilée, Ga , et de l'indice de comportement du fluide, m . Plus spécifiquement, $\Omega H/(c u_{z,1}) = (H/a_1) \text{Ga}^{\frac{1}{2m+2}}$, tandis que $\delta c/H = (H/a_1) \text{Ga}^{\frac{-1}{2m+2}}$ (où c est un pré-facteur relatif à chaque fluide en loi puissance, à chaque valeur de m ; $c \sim (O)10^{-1}$). La vitesse verticale initiale $u_{z,0}$ (0.1 m/s), la consistance k (10 Pa s m), la masse volumique ρ (1000 kg/m 3) et la hauteur de chute H (0.07m) sont fixes.

4 Conclusion et perspectives

Nous avons donc étudié les effets des comportements non-newtoniens, pseudo-plastique et dilatant, sur le phénomène d'instabilité de flambage. Nos appuyons nos analyses sur des lois d'échelle et des modélisations numériques directes de l'écoulement multiphasique (air, fluide visqueux). Une fonction level-set est utilisée afin d'obtenir une position précise de l'interface entre les fluides.

En résumé, lorsque le poids et les forces visqueuses sont les principaux efforts dans le fluide (régime gravitationnel), la fréquence de repliement, Ω , ainsi que l'amplitude des plis, δ , (rendus respectivement sans dimension par $u_{z,1}/H$ et H) apparaissent comme des fonctions du nombre de Galilée, Ga , et de l'indice de comportement du fluide, m . Plus spécifiquement, $\Omega H/u_{z,1} = (c H/a_1)\text{Ga}^{\frac{1}{2m+2}}$, et $\delta/H = (1/c)(a_1/H)\text{Ga}^{\frac{-1}{2m+2}}$ (dans lesquelles c est un pré-facteur dépendant de chaque indice m). Notamment, dans le cas d'un fluide newtonien ($m = 1$), on retrouve $\Omega H/u_{z,1} \sim (H/a_1)\text{Ga}^{\frac{1}{4}}$ and $\delta/H \sim (a_1/H)\text{Ga}^{-\frac{1}{4}}$, comme précédemment démontré par Ribe [8].

Pour aller plus loin, il serait intéressant d'étudier les limites du régime gravitationnel dans le cas des fluides en loi puissance. En effet, comme nous l'avons remarqué sur la figure 4, le phénomène de repliement peut s'arrêter sous certaines conditions ; le fluide s'étale alors sans plier sur la surface rigide. Nous avons commencé à étudier cette hauteur limite mais les résultats ne sont pas encore aboutis. L'idée était que la nappe cesse de flamber lorsque la taille des plis serait du même ordre de grandeur que l'épaisseur de la nappe (on ne peut plus parler de plis). En utilisant les résultats démontrés plus haut (établissant une relation de l'amplitude des plis), une nouvelle loi d'échelle est envisageable pour la hauteur limite où le fluide cesse de plier.

De la même manière, il serait intéressant de considérer le régime visqueux (limite précédant le régime gravitationnel) dans le cas des fluides non newtonien. Dans ce dernier, la viscosité n'intervenait pas dans les lois d'échelle pour le cas des fluides newtoniens (Ribe[8]). Les calculs théoriques que nous avons effectués supposent le même comportement lorsque la viscosité varie en loi puissance. Néanmoins, nous n'avons pas eu le temps de réaliser des simulation numérique de ces écoulements. De plus, un dernier point mériterait une étude plus approfondie. En effet, comme mentionné dans la figure 1, dans le cas d'un jet cylindrique, quatre différents régimes d'enroulement existent, chacun résultant d'un équilibre entre des forces prépondérantes (visqueuse, pesanteur, et inertielle). En revanche, dans le cas des nappes, nous n'en observons que deux. Il n'y a pas de régime que l'on pourrait définir d'inertiel où les déformations visqueuses viendraient compenser la variations d'énergie cinétique de la chute de la nappe. Cette réalité étonnante viendrait peut être de la géométrie de nappe qui contraint la vitesse selon le plan $x - z$ à s'annuler à chaque formation de plis, dissipant alors l'énergie cinétique avant le flambage. Cela ne sont que des réflexions qu'il faudrait détailler.

Enfin, il serait intéressant de considérer dans des futurs travaux, d'autres effets non-newtonien sur les nappes tels que les contraintes de seuil et/ou l'élasticité.

Remerciements

Je voudrais remercier l'équipe CFL du Cemef pour leur accueil et tout particulièrement Anselmo Pereira, Rudy Valette et Elie Hachem ; leur aide et conseils ont été précieux.

5 Références

- [1] G. Barnes and R. Woodcock, American Journal of Physics 26, 205 (1958).
- [2] G. I. Taylor, Proceedings of the Twelfth International Congress of Applied Mechanics, Stanford, 1968 Springer-Verlag, Berlin, 382 (1969).
- [3] J. O. Cruickshank, Journal of Fluid Mechanics 193, 111(1988).
- [4] A. L. Yarin and B. M. Tchavdarov, Journal of Fluid Mechanics 307, 85 (1996).

- [5] L. Mahadevan, W. S. Ryu, and A. D. T. Samuel, *Nature* 392, 140 (1998).
- [6] L. Mahadevan, W. S. Ryu, and A. D. T. Samuel, *Nature* 403, 502 (2000).
- [7] M. Le Merrer, D. Quéré, and C. Clanet, *Physical Review Letters* 109, 064502 (2012).
- [8] N. M. Ribe, *Physical Review E* 68, 036305 (2003).
- [9] N. M. Ribe, H. E. Huppert, M. A. Hallworth, M. Habibi, and D. Bonn, *Journal of Fluid Mechanics* 555, 275 (2006).
- [10] N. M. Ribe, M. Habibi, and D. Bonn, *Annual Review of Fluid Mechanics* 44, 249 (2012).
- [11] L. A. B. Pilkington, *Transport Phenomena and Fluid Mechanics*, *AIChE Journal* 314, 1 (1969).
- [12] J. Pearson, Elsevier, Amsterdam (1985).
- [13] R. W. Griffiths and J. S. Turner, *Geophysical Journal International* 95, 397 (1988).
- [14] A. M. Johnson and R. C. Fletcher, Columbia University, New York (1994).
- [15] M. Habibi, S. H. Hosseini, M. H. Khatami, and N. M. Ribe, *Physics of Fluids* 26, 024101 (2014).
- [16] N. M. Ribe, *Journal of Fluid Mechanics* 812, R2 (2017).
- [17] M. F. Tomé, M. T. Araujo, J. Evans, and S. Mckee, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* 263, 104 (2019).
- [18] A. Pereira, A. Larcher, E. Hachem, and R. Valette, *Computers and Fluids* 190, 514 (2019).
- [19] W. Ostwald, *Kolloid-Z* 36, 99117 (1925).
- [20] R. B. Bird, R. C. Armstrong, and O. Hassager, Wiley Interscience, New York 2nd edition, 172 (1987).
- [21] T. Coupez and E. Hachem, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 267, 65 (2013).
- [22] R. Valette, E. Hachem, M. Khallouffi, A. S. Pereira, M. R. Mackley, and S. A. Butler, *Journal of Non Newtonian Fluid Mechanics* 263,130(2019).
- [23] T. Papanastasiou, *Journal of Rheology* 31, 385-404 (1987).
- [24] S. Riber, R. Valette, Y. Mesri, and E. Hachem, *Computers and Fluids* 138, 51 (2016).
- [25] E. Hachem, M. Khallouffi, J. Bruchon, R. Valette, and Y. Mesri, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 308, 238 (2016).